

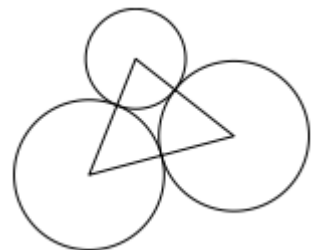
01. O resto da divisão de 2026 por um certo número inteiro é igual a 1026. Então:

- (A) o divisor é 100
- (B) o divisor é 500
- (C) o divisor é 1000
- (D) o divisor é outro número inteiro
- (E) não é possível obter este resto

Gabarito Comentado (Alternativa E) Pelas regras da divisão euclidiana, o resto deve ser obrigatoriamente menor que o divisor. Para que o resto fosse 1026, o divisor teria que ser um número maior que 1026. Ao mesmo tempo, o divisor precisa ser um fator da diferença entre o dividendo e o resto ($2026 - 1026 = 1000$). Como nenhum divisor de 1000 é maior que 1026, é matematicamente impossível obter esse resto na operação descrita.

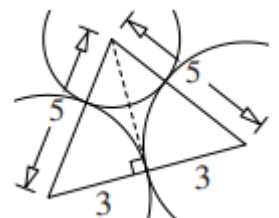
02. Três círculos com raios 2, 3 e 3 tangenciam-se entre si, como mostrado no diagrama. Qual é a área do triângulo formado pela união dos centros desses círculos?

- (A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18



Gabarito comentado: Letra B

O triângulo formado pela união dos centros dos círculos é isósceles, portanto, dividi-lo ao longo de sua linha de simetria nos dá dois triângulos retângulos, cada um com uma base de 3 e uma hipotenusa de 5. Usando o Teorema de Pitágoras, a altura perpendicular é 4. A área do triângulo inteiro é, então, $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$.



03. Quantos dos números 6, 7, 8, 9 e 10 são divisores da soma $2^{2026} + 2^{2025} + 2^{2024}$?

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

Gabarito comentado — Alternativa B

Queremos descobrir quantos dos números 6, 7, 8, 9 e 10 são divisores da soma:

$$2^{2026} + 2^{2025} + 2^{2024}$$

Colocando o menor fator comum em evidência, temos:

$$2^{2026} + 2^{2025} + 2^{2024} = 2^{2024} \cdot (2^2 + 2^1 + 1)$$

Como:

$$2^2 + 2^1 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$$

então:

$$2^{2026} + 2^{2025} + 2^{2024} = 7 \cdot 2^{2024}$$

Agora analisamos os números dados:

$$6 = 2 \cdot 3$$

Não divide a soma, pois não há fator 3.

$$7$$

Divide a soma, pois aparece como fator.

$$8 = 2^3$$

Divide a soma, pois 2^{2024} possui fator 2^3 .

$$9 = 3^2$$

Não divide a soma, pois não há fator 3.

$$10 = 2 \cdot 5$$

Não divide a soma, pois não há fator 5.

Portanto, apenas os números 7 e 8 são divisores da soma.

Assim, a quantidade de números que são divisores é:

$$2$$

Resposta: (B) 2

04. Considere todos os anagramas da palavra DNMAT escritos em ordem alfabética



Nessa lista, qual é a posição ocupada pelo anagrama DNMAT?

(A) 35 (B) 37 (C) 39 (D) 41 (E) 43

Gabarito Comentado (Alternativa C)

Para determinar a posição, contamos quantos anagramas precedem DNMAT na ordem alfabética. Primeiro, calculamos os iniciados pela letra A, que totalizam 24 ($4!$). Em seguida, para os iniciados por D, contamos os que possuem as próximas letras em ordem: os começados por DA somam 6 ($3!$) e os começados por DM somam mais 6 ($3!$). Dentro do grupo iniciado por DN, o próximo prefixo é DNA, que possui 2 anagramas ($2!$). Somando todos os grupos anteriores ($24 + 6 + 6 + 2$), obtemos 38 anagramas. Portanto, o próximo anagrama da lista é o próprio DNMAT, ocupando a 39ª posição.

05. Qual dos números a seguir é a média aritmética dos outros quatro?



(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{18}$ (C) $\sqrt{200}$ (D) $\sqrt{32}$ (E) $\sqrt{8}$

Gabarito Comentado: Letra D.

Vamos simplificar os radicais:

$$\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{(9 \cdot 2)} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{(100 \cdot 2)} = 10\sqrt{2}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{(16 \cdot 2)} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{(4 \cdot 2)} = 2\sqrt{2}$$

Assim, os números são:

$$\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 10\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$$

A média é:

$$\frac{(\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 10\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2})}{5} = \frac{20\sqrt{2}}{5} = 4\sqrt{2} = \sqrt{32}$$

06. Em uma corrida, dois carros A e B seguem na mesma direção. O carro A está à frente do carro B. Em certo instante, ambos estão a 180 km/h, e o carro B está exatamente 1 segundo atrás do carro A.

Pouco depois, o carro B aumenta sua velocidade para 216 km/h, enquanto o carro A mantém a velocidade de 180 km/h.

Mantidas essas velocidades, em quantos segundos o carro B alcançará o carro A?

- (A) 5
- (B) 10
- (C) 15
- (D) 20
- (E) 25

Gabarito comentado — Alternativa A

Inicialmente, os dois carros estão a 180 km/h e o carro B está 1 segundo atrás do carro A. Isso significa que o carro B passaria pelo mesmo ponto em que o carro A está **1 segundo depois**.

Primeiro, vamos converter 180 km/h para metros por segundo:

$$180 \text{ km/h} = 180000 \text{ m} / 3600 \text{ s} = 50 \text{ m/s}$$

Portanto, a 180 km/h, cada carro percorre 50 metros em 1 segundo.

Como a diferença entre eles era de 1 segundo, a distância inicial entre os carros era:

$$50 \cdot 1 = 50 \text{ m}$$

Agora, o carro B aumenta sua velocidade para 216 km/h. Convertendo:

$$216 \text{ km/h} = 216000 \text{ m} / 3600 \text{ s} = 60 \text{ m/s}$$

Assim, temos:

Carro A: 50m/s

Carro B: 60 m/s

Como os dois seguem na mesma direção, a velocidade com que o carro B se aproxima do carro A é a diferença entre as velocidades:

$$60 - 50 = 10 \text{ m/s}$$

Isso significa que o carro B reduz a distância entre eles em 10 metros a cada segundo.

Como a distância inicial era de 50 m, o tempo necessário para o carro B alcançar o carro A é:

$$50 / 10 = 5 \text{ segundos}$$

Resposta: (A) 5

07. O número $16! \div 2^k$ é um inteiro ímpar.

Lembre que:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$$

Qual é o valor de k?

(A)9

(B)11

(C)13

(D)15

(E) 17

Gabarito comentado — Alternativa D

Para que $16! \div 2^k$ seja um inteiro ímpar, precisamos retirar de $16!$ todos os fatores 2.

Portanto, k deve ser a quantidade de fatores 2 presentes na fatoração de $16!$.

Vamos contar quantas vezes o fator 2 aparece em $16!$.

Entre os números de 1 a 16, os múltiplos de 2 contribuem com pelo menos um fator 2:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16

São 8 fatores 2.

Agora contamos os fatores extras vindos dos múltiplos de 4:

4, 8, 12, 16

São mais 4 fatores 2.

Depois, os fatores extras vindos dos múltiplos de 8:

8, 16

São mais 2 fatores 2.

Por fim, o fator extra vindo do múltiplo de 16:

16

É mais 1 fator 2.

Assim, o total de fatores 2 em $16!$ é:

$$8 + 4 + 2 + 1 = 15$$

Logo, para que $16! \div 2^k$ seja ímpar, devemos ter:

$$k = 15$$

Resposta: (D) 15

15. Uma função f , definida nos números reais, satisfaz $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$ para quaisquer números reais x e y . Sabendo que $f(1) = 4$, qual é o valor de $f(5)$?

- (A) 25
- (B) 30
- (C) 35
- (D) 40
- (E) 45

Gabarito comentado — Alternativa E

A função satisfaz:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$$

Vamos primeiro descobrir $f(0)$. Tomando $x = 0$ e $y = 0$, temos:

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0) + 2 \cdot 0 \cdot 0$$

$$f(0) = 2f(0)$$

Logo:

$$f(0) = 0$$

Agora vamos perceber o padrão da função. A expressão $2xy$ lembra a identidade:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

Por isso, podemos comparar $f(x)$ com x^2 . Defina:

$$g(x) = f(x) - x^2$$

Então:

$$g(x + y) = f(x + y) - (x + y)^2$$

Como $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$, temos:

$$g(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy - (x^2 + 2xy + y^2)$$

$$g(x + y) = f(x) - x^2 + f(y) - y^2$$

$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$

Assim, g é uma função aditiva.

Como $f(1) = 4$, temos:

$$g(1) = f(1) - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

Para números naturais, uma função aditiva satisfaz:

$$g(5) = 5g(1) = 5 \cdot 3 = 15$$

Logo:

$$f(5) = g(5) + 5^2$$

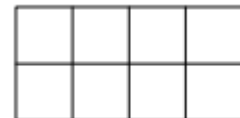
$$f(5) = 15 + 25$$

$$f(5) = 40$$

Resposta: (D) 40

08. Diane possui cinco discos azuis idênticos, dois discos vermelhos idênticos e um disco amarelo. Ela deseja colocá-los em uma grade 2×4 , de modo que cada célula contenha exatamente um disco. Os dois discos vermelhos não podem ser colocados em células que compartilham uma aresta comum.

Quantas grades diferentes ela pode formar?



- (A) 96
- (B) 108
- (C) 144
- (D) 180
- (E) 216

Gabarito comentado:

Um método de contagem é considerar primeiro a posição dos dois discos vermelhos, trabalhando de forma sistemática da esquerda para a direita.

Se houver um disco vermelho em uma das duas posições da primeira coluna, então existem 5 posições possíveis para o segundo disco vermelho, sem que eles compartilhem uma aresta.

Se não houver discos vermelhos na primeira coluna, mas houver um disco vermelho em uma das duas posições da segunda coluna, então existem 3 posições possíveis para o segundo disco vermelho.

Se não houver discos vermelhos nas duas primeiras colunas, mas houver um disco vermelho em uma das duas posições da terceira coluna, então existe exatamente 1 posição possível para o segundo disco vermelho.

Assim, o total de posições visualmente diferentes para os dois discos vermelhos é:

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 18$$

Depois disso, o único disco amarelo pode ser colocado em qualquer uma das 6 casas restantes.

As últimas 5 posições serão preenchidas pelos cinco discos azuis, que são idênticos.

Portanto, o número total de possibilidades é:

$$18 \cdot 6 \cdot 1 = 108$$

Resposta: (B) 108

08. A região sombreada mostrada na figura é formada pelo interior de um círculo de raio 3 juntamente com a região entre o círculo e duas tangentes a ele.

O ângulo entre as tangentes, no ponto em que elas se encontram, é 60° .

Qual é a área sombreada?

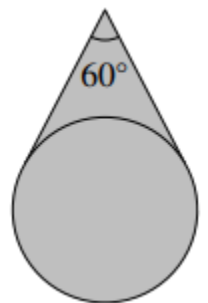
(A) $6\pi + 9\sqrt{3}$

(B) $15\sqrt{3}$

(C) 9π

(D) $9\pi + 4\sqrt{3}$

(E) $6\pi + 9\sqrt{3}/4$



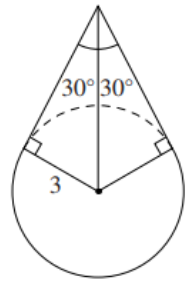
Gabarito comentado — Alternativa A

Uma forma eficiente de resolver é traçar três segmentos auxiliares na figura:

o segmento vertical que liga o centro do círculo ao vértice superior;

e os dois segmentos que ligam o centro do círculo aos pontos de tangência.

Como os raios são perpendiculares às tangentes nos pontos de tangência, formam-se dois triângulos retângulos congruentes.



O ângulo entre as tangentes é 60° . Como o segmento vertical divide esse ângulo ao meio, cada triângulo possui um ângulo de 30° no vértice superior.

Assim, cada um desses triângulos é um triângulo retângulo de ângulos 30° , 60° e 90° .

Como o raio do círculo mede 3, o cateto oposto ao ângulo de 30° mede 3. Portanto, pela razão dos triângulos 30° – 60° – 90° , o comprimento da tangente é:

$$3\sqrt{3}$$

A área de cada triângulo é:

$$(1/2) \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}/2$$

Como são dois triângulos, a soma das áreas desses triângulos é:

$$2 \cdot 9\sqrt{3}/2 = 9\sqrt{3}$$

Agora falta considerar a parte do círculo que também está sombreada.

O ângulo entre os dois raios que vão aos pontos de tangência é 120° . Portanto, a região do círculo que aparece fora dos dois triângulos corresponde a $2/3$ da área total do círculo.

Como o raio do círculo é 3, a área total do círculo é:

$$\pi \cdot 3^2 = 9\pi$$

Logo, $2/3$ dessa área é:

$$(2/3) \cdot 9\pi = 6\pi$$

Portanto, a área sombreada total é:

$$6\pi + 9\sqrt{3}$$

Resposta: (A) $6\pi + 9\sqrt{3}$

09. Uma colônia de amebas tem inicialmente uma ameba amarela e uma ameba vermelha. Todos os dias, uma única ameba se divide em duas amebas idênticas. Cada ameba na colônia tem a mesma probabilidade de se dividir, independentemente de sua idade ou cor.

Qual é a probabilidade de que, após 2006 dias, a colônia tenha exatamente uma ameba amarela?

- (A) $\frac{1}{2^{2006}}$ (B) $\frac{1}{2006}$ (C) $\frac{1}{2007}$ (D) $\frac{1}{2006 \cdot 2007}$ (E) $\frac{2006}{2007}$

Gabarito: Letra C

Inicialmente, a colônia tem:

1 ameba amarela

1 ameba vermelha

Todos os dias, uma única ameba é escolhida para se dividir em duas amebas idênticas. Isso significa que, se uma ameba amarela se dividir, o número de amebas amarelas aumenta em 1. Se uma ameba vermelha se dividir, o número de amebas vermelhas aumenta em 1.

Queremos que, após 2006 dias, exista exatamente uma ameba amarela.

Para isso acontecer, nenhuma ameba amarela pode ter se dividido durante esses 2006 dias. Ou seja, em todos os dias, a ameba escolhida para se dividir precisa ser vermelha.

No início, há 2 amebas no total, sendo 1 vermelha. Então, a probabilidade de escolher uma vermelha no primeiro dia é:

$$1/2$$

Depois disso, haverá 2 vermelhas e 1 amarela, totalizando 3 amebas. A probabilidade de escolher uma vermelha no segundo dia será:

$$2/3$$

No terceiro dia, será:

$$3/4$$

E assim sucessivamente.

Portanto, a probabilidade desejada é:

$$1/2 \cdot 2/3 \cdot 3/4 \cdot 4/5 \cdot \dots \cdot 2006/2007$$

Essa multiplicação é telescópica, pois quase todos os fatores se cancelam:

$$1/2 \cdot 2/3 \cdot 3/4 \cdot \dots \cdot 2006/2007 = 1/2007$$

Logo, a probabilidade de que, após 2006 dias, a colônia tenha exatamente uma ameba amarela é:

$$1/2007$$

Resposta: (C) 1/2007

10. Uma sequência tem 9 números reais, sendo o primeiro 20 e o último 6. Cada termo da sequência, a partir do terceiro, é a média aritmética de todos os termos anteriores.

Qual é o segundo termo da sequência?

- (A) -8
- (B) 0
- (C) 4
- (D) 14
- (E) 2006

Gabarito comentado — Alternativa A

Seja x o segundo termo da sequência.

Então os dois primeiros termos são:

20 e x

A partir do terceiro termo, cada termo é a média aritmética de todos os anteriores.

Assim, o terceiro termo é a média dos dois primeiros:

$$(20 + x)/2$$

Agora observe um ponto importante: se o terceiro termo é igual à média dos dois primeiros, então a média dos três primeiros também continua sendo:

$$(20 + x)/2$$

Isso acontece porque estamos acrescentando à lista exatamente o valor que já era a média anterior.

Portanto, o quarto termo também será:

$$(20 + x)/2$$

E o mesmo raciocínio vale para todos os termos seguintes, do terceiro ao nono.

Logo, o último termo da sequência, que é o nono termo, vale:

$$(20 + x)/2$$

Como o enunciado diz que o último termo é 6, temos:

$$(20 + x)/2 = 6$$

$$20 + x = 12$$

$$x = -8$$

Portanto, o segundo termo da sequência é:

Resposta: (A) -8

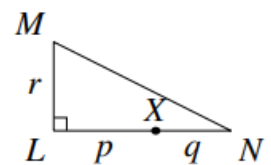
11. O triângulo LMN representa um campo retangular em L, com $LM = r$, $LX = p$ e $XN = q$.

Joana e Maria caminham com a mesma velocidade, em sentidos opostos, ao longo da borda do campo, começando em X ao mesmo tempo. O primeiro encontro delas acontece em M.

Qual das expressões abaixo representa q em função de p e r?

(A) $\frac{p}{2} + r$

(B) $\sqrt{p^2 + r^2} + \frac{p}{2}$



(C) $\frac{pr}{2p + r}$

(D) $\frac{p}{2}$

(E) 1

Gabarito comentado: Letra C

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$NM = \sqrt{((p + q)^2 + r^2)}$$

Como Jenny e Vicky caminham com a mesma velocidade e partem de X ao mesmo tempo, para se encontrarem pela primeira vez em M, as duas distâncias percorridas até M devem ser iguais.

Uma delas percorre:

$$p + r$$

A outra percorre:

$$q + \sqrt{((p + q)^2 + r^2)}$$

Portanto:

$$p + r = q + \sqrt{((p + q)^2 + r^2)}$$

Reorganizando:

$$p + r - q = \sqrt{((p + q)^2 + r^2)}$$

Elevando os dois lados ao quadrado:

$$(p + r - q)^2 = (p + q)^2 + r^2$$

Expandindo:

$$p^2 + r^2 + q^2 + 2pr - 2pq - 2qr = p^2 + 2pq + q^2 + r^2$$

Cancelando os termos iguais dos dois lados, obtemos:

$$2pr - 2pq - 2qr = 2pq$$

Logo:

$$2pr - 2qr = 4pq$$

Colocando 2q em evidência no lado esquerdo:

$$2pr = 4pq + 2qr$$

$$2pr = 2q(2p + r)$$

Dividindo por 2:

$$pr = q(2p + r)$$

Portanto:

$$q = pr/(2p + r)$$

Resposta: (C) $pr/(2p + r)$

12. Seja x um número real. Qual é o valor mínimo de $(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 3)$?

(A) -16

(B) -9

(C) 0

(D) 9

(E) 16

Gabarito comentado — Alternativa A

Queremos encontrar o valor mínimo de:

$$(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 3)$$

Observe que os dois fatores podem ser escritos como:

$$(x^2 + 3 - 4x)(x^2 + 3 + 4x)$$

Usando a identidade $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, com $a = x^2 + 3$ e $b = 4x$, temos:

$$(x^2 + 3 - 4x)(x^2 + 3 + 4x) = (x^2 + 3)^2 - (4x)^2$$

$$= x^4 + 6x^2 + 9 - 16x^2$$

$$= x^4 - 10x^2 + 9$$

Agora fazemos $y = x^2$. Como x é real, temos $y \geq 0$. Assim, a expressão se torna:

$$y^2 - 10y + 9$$

Completando quadrados:

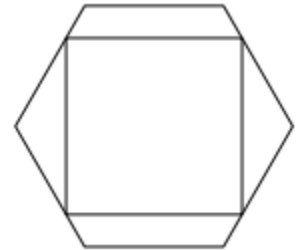
$$y^2 - 10y + 9 = (y - 5)^2 - 16$$

Como $(y - 5)^2 \geq 0$, o menor valor possível é -16, que ocorre quando $y = 5$. Como $y = x^2$, isso é possível para x real, por exemplo, $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$.

Portanto, o valor mínimo da expressão é -16 .

Resposta: (A) -16

13. Um quadrado tem seus vértices sobre os lados de um hexágono regular. Dois lados do quadrado são paralelos a dois lados do hexágono, como mostrado na figura.



Os lados do hexágono medem 1.

Qual é o comprimento dos lados do quadrado?

- (A) $\frac{5}{4}$
- (B) $3 - \sqrt{3}$
- (C) $\frac{4}{3}$
- (D) $\sqrt{2}$
- (E) $\frac{3}{2}$

Gabarito comentado — Alternativa B

Seja o lado do quadrado igual a $2y$. Pela simetria da figura, basta analisar a parte superior esquerda do desenho. Nessa região, aparecem dois triângulos retângulos com ângulos de 30° , 60° e 90° . Chamaremos suas hipotenusas de p e q .

Como o lado do hexágono mede 1, temos:

$$p + q = 1$$

Pelas razões do triângulo 30° – 60° – 90° , obtemos duas expressões para y :

$$y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)p$$

e

$$y = \frac{q}{2} + \frac{1}{2}$$

Igualando as duas expressões:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)p = \frac{q}{2} + \frac{1}{2}$$

Multiplicando por 2:

$$\sqrt{3}p = q + 1$$

Como $p + q = 1$, então $q = 1 - p$. Substituindo:

$$\sqrt{3}p = 1 - p + 1$$

$$\sqrt{3}p = 2 - p$$

$$p(\sqrt{3} + 1) = 2$$

$$p = \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$$

Racionalizando:

$$p = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{2} = \sqrt{3} - 1$$

Como o lado do quadrado é $2y$ e $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)p$, temos:

$$2y = \sqrt{3}p$$

Logo:

$$2y = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = 3 - \sqrt{3}$$

Portanto, o comprimento do lado do quadrado é $3 - \sqrt{3}$.

Resposta: (B) $3 - \sqrt{3}$

14. Cinco amigos recebem duas cartas cada um, retiradas de um conjunto de doze cartas numeradas de 1 a 12.

Em ordem, os amigos dizem a soma dos valores de suas duas cartas:

Pedro fez 4.

Júlia fez 11.

Rafaela fez 16.

Gustavo fez 19.

Tiago fez 20.

Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

(A) Pedro tem a carta 2

(B) Júlia tem a carta 3

(C) Rafaela tem a carta 5

(D) Gustavo tem a carta 7

(E) Tiago tem a carta 11

Gabarito comentado — Alternativa C

Como Pedro fez 4, suas cartas só podem ser 1 e 3, pois são as únicas cartas positivas distintas, entre 1 e 12, cuja soma é 4.

Agora analisamos Tiago, que fez 20. As possibilidades são:

$8 + 12$ ou $9 + 11$

Gustavo fez 19. As possibilidades são:

$7 + 12$, $8 + 11$ ou $9 + 10$

Rafaela fez 16. As possibilidades são:

$4 + 12$, $5 + 11$, $6 + 10$ ou $7 + 9$

Júlia fez 11. Como as cartas 1 e 3 já estão com Pedro, as possibilidades restantes para Júlia são:

$2 + 9$, $4 + 7$ ou $5 + 6$

Testando as combinações sem repetir cartas, a única distribuição possível é:

Pedro: 1 e 3

Júlia: 4 e 7

Rafaela: 5 e 11

Gustavo: 9 e 10

Tiago: 8 e 12

As cartas que sobram são 2 e 6.

Portanto, Rafaela tem a carta 5.

Resposta: (C) Rafaela tem a carta 5